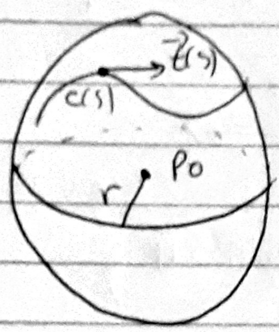
Μάθημα 8/ 06/11/2017

Σφαιρικές Καμπύλες

Έστω ότι $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ σφαιρική με παράμετρο το μήκος τόξου s. Υποθέτουμε ότι η εικόνα $c(I)$ περιέχεται σε σφαίρα κέντρου p_0 και ακτίνα $r>0$

$$d(c(s), p_0) = r \Leftrightarrow \langle c(s)-p_0, c(s)-p_0 \rangle = r^2$$



$$\boxed{\langle c(s)-p_0, \dot{c}(s) \rangle = 0} \Leftrightarrow \langle c(s)-p_0, \vec{t}(s) \rangle = 0$$

$$\boxed{\langle c(s)-p_0, \ddot{c}(s) \rangle = -1} \Rightarrow k(s) = \|\ddot{c}(s)\| > 0 \ \forall s \in I$$

$\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$ $\quad c(s)-p_0 = \langle c(s)-p_0, \vec{n}(s) \rangle \vec{n}(s) + \langle c(s)-p_0, \vec{b}(s) \rangle \vec{b}(s)$

$$r^2 = \|c(s)-p_0\|^2 = \langle c(s)-p_0, \vec{n}(s) \rangle^2 + \langle c(s)-p_0, \vec{b}(s) \rangle^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{r} \langle c(s)-p_0, \vec{n}(s) \rangle\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \langle c(s)-p_0, \vec{b}(s) \rangle\right)^2 = 1$$

ΛΗΜΜΑ $\Rightarrow$ $\exists$ λεία γωνιακή συνάρτηση $w: I \to \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\boxed{\begin{aligned} \langle c(s)-p_0, \vec{n}(s) \rangle &= r\cos w(s) \\ \langle c(s)-p_0, \vec{b}(s) \rangle &= r\sin w(s) \end{aligned}}$$

$<c(s)-p_0, \ddot{c}(s)> = -1 \Leftrightarrow$

$<c(s)-p_0, \dot{\vec{t}}(s)> = -1 \Leftrightarrow$

$<c(s)-p_0, k(s)\vec{n}(s)> = -1 \Leftrightarrow$

$k(s) <c(s)-p_0, \vec{n}(s)> = -1 \Leftrightarrow$

$$\boxed{r k(s) \cos w(s) = -1}$$

$\Rightarrow k(s) = -\dfrac{1}{r\cos w(s)} \geq \dfrac{1}{r}$ <u>Συμπέρασμα</u> $k(s) \geq \dfrac{1}{r}$

$c(s)-p_0 = r\left(\cos w(s)\vec{n}(s) + \sin w(s)\vec{b}(s)\right) \xrightarrow{\text{ΠΑΡ/ΖΩ}}$

$\vec{t} = r\left\{-\dot{w}\sin w\,\vec{n} + \cos w(-k\vec{t} + \tau\vec{b}) + \dot{w}\cos w\,\vec{b} - \tau \sin w\,\vec{n}\right\}$

$\Leftrightarrow \vec{t} = r\left\{-k\cos w\,\vec{t} - \sin w(\dot{w}+\tau)\vec{n} + \cos w(\dot{w}+\tau)\vec{b}\right\}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -rk\cos w = 1 \\ \sin w(\dot{w}+\tau) = 0 \\ \cos w(\dot{w}+\tau) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\tau = -\dot{w}}$ $\boxed{k = -\dfrac{1}{r\cos w}}$

$\dot{k} = \dfrac{1}{r^2\cos^2 w}(r\cos w)' = \dfrac{-r\dot{w}\sin w}{r^2\cos^2 w} = -k^2 \cdot \tau \cdot r\sin w \Rightarrow \boxed{\dfrac{\dot{k}}{k^2\tau} = r\sin w}$ (1)

Υπό την προϋπόθεση ότι $\tau(s) \neq 0 \ \forall s \in I$

$\boxed{r\cos w = -\dfrac{1}{k}}$ (2) Από τις (1) κ (2)

Λαμβάνω $\left(\dfrac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{k}\right)^2 = r^2$

Παραγωγίζω την (1) και έχω $\left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^{\cdot} = r\dot{\omega}\cos\omega = -\tau r\cos\omega \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^{\cdot} = \frac{\tau}{k}}$$

<u>Ερώτημα</u>: Αν μια καμπύλη με καμπυλότητα $k(s)>0$ $\forall s\in I$ και στρέψη $\tau(s)\neq 0$ $\forall s\in I$ πληροί την

$\left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^{\cdot} = \frac{\tau}{k}$ είναι σφαιρική ;

ΠΟΡΙΣΜΑ Οι σφαιρικές καμπύλες με σταθερή καμπυλότητα είναι κύκλος (ή τόξα κύκλων)

<u>Απάντηση</u>: Ορίζω τη διανυσματική συνάρτηση $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$

$$\alpha = c + \frac{1}{k}\vec{n} - \frac{\dot{k}}{k^2\tau}\vec{b}$$

<u>Παραγωγίζω</u>:

$$\dot{\alpha} = \vec{t} - \frac{\dot{k}}{k^2}\vec{n} + \frac{1}{k}\left(-k\vec{t} + \tau\vec{b}\right) - \left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^{\cdot}\vec{b} + \frac{\dot{k}}{k^2\tau}\tau\vec{n} =$$

$$= \left\{\frac{\tau}{k} - \left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^{\cdot}\right\}\vec{b} \Rightarrow \dot{\alpha}(s) = 0 \ \forall s \Rightarrow \alpha(s) = p_0 = \text{σταθ} \ \forall s\in I$$

$$\|c(s) - p_0\|^2 = \left\|\frac{1}{k}\vec{n} - \frac{\dot{k}}{k^2\tau}\vec{b}\right\|^2 = \left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2$$

παρ/γω

$$2\left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)\left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^{\cdot} + 2\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}\right)^{\cdot} = 2\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\frac{\tau}{k} - 2\frac{1}{k}\frac{\dot{k}}{k^2} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \|c(s) - p_0\|^2 = 6\tau\alpha\theta \Rightarrow$ Η c είναι σφαιρική

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ Μια καμπύλη κανονική του $\mathbb{R}^3$ με καμπυλότητα $k>0$ και στρέψη $\tau \neq 0$ παντού είναι σφαιρική αν-ν $\left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^{\cdot} = \frac{\tau}{k}$

$\boxed{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}$ Μια καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καλείται κλειστή αν-ν $\exists$ $L>0$: $c(L+s) = c(s)$ $\forall s \in \mathbb{R}$

$k(s+L) = k(s)$, $\tau(s+L) = \tau(s)$

$\vec{t}(s+L) = \vec{t}(s)$, $\vec{n}(s+L) = \vec{n}(s)$, $\vec{b}(s+L) = \vec{b}(s)$

$\tau(s) = -\dot{w}(s)$, $w(s+L) = w(s)$

$\pi/2 < w(s) < 3\pi/2$

$$\int_0^L \tau(s)ds = -\int_0^L \dot{w}(s)ds = +w(0) - w(L) = 0$$

Δίνεται η καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με

$c(t) = (t - \sqrt{3}\sin t,\ 2\cos t,\ \sqrt{3}t + \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$
κανονικότητα, αναπαραμ. με φυσική παράμετρο, καμπυλότητα, στρέψη και πλαίσιο Frenet (αν ορίζεται)

ΛΥΣΗ

Η c είναι λείος με διάνυσμα ταχύτητας

$c'(t) = (1 - \sqrt{3}\cos t,\ -2\sin t,\ \sqrt{3} + \cos t)$

$\|c'(t)\|^2 = 1 + 3\cos^2 t - \cancel{2\sqrt{3}\cos t} + 4\sin^2 t + 3 + \cos^2 t + \cancel{2\sqrt{3}\cos t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|c'(t)\| = 2\sqrt{2} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, άρα η c είναι κανονική
Το μήκος τόξου με αφετηρία $t_0 = 0$ είναι η συνάρτηση $s: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s(t) = \int_0^t \|c'(u)\| du$ η $\boxed{s(t) = 2\sqrt{2}t \Leftrightarrow t = \frac{s(t)}{2\sqrt{2}}}$

Η αναπαραμετρωποίηση της c με φυσική παράμετρο είναι:

$$c(s) = \left(\frac{s(t)}{2\sqrt{2}} - \sqrt{3}\sin\left(\frac{s(t)}{2\sqrt{2}}\right),\ 2\cos\left(\frac{s(t)}{2\sqrt{2}}\right),\ \frac{\sqrt{3}\,s(t)}{2\sqrt{2}} + \sin\left(\frac{s(t)}{2\sqrt{2}}\right) \right)$$

Η καμπυλότητα της $c(t)$ είναι η συνάρτηση

$$k(t) = \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3}$$

$c''(t) = (\sqrt{3}\sin t,\ -2\cos t,\ \sqrt{3} - \sin t)$
$c'(t) \times c''(t) = \ldots$

Βρίσκω ότι $\kappa(t) = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow$ ορίζεται πλ. Frenet

και στρέψη. Η στρέψη είναι η συνάρτηση

$\tau(t) = \frac{[c'(t), c''(t), c'''(t)]}{\|c'(t) \times c''(t)\|^2} = \dots \Rightarrow \tau(t) = \frac{1}{4}$

Πλαίσιο Frenet: $\vec{t}(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} \dots$

$\vec{b}(t) = \frac{c'(t) \times c''(t)}{\|c'(t) \times c''(t)\|} = \dots$

$\vec{n}(t) = \vec{b}(t) \times \vec{t}(t) = \dots$

Παρατηρώ ότι ο λόγος $\frac{\tau}{\kappa} = 1 =$ σταθερό $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η c είναι κυλινδρική έλικα

και μάλιστα μπορώ να βρω κλίση και διεύθυνση.

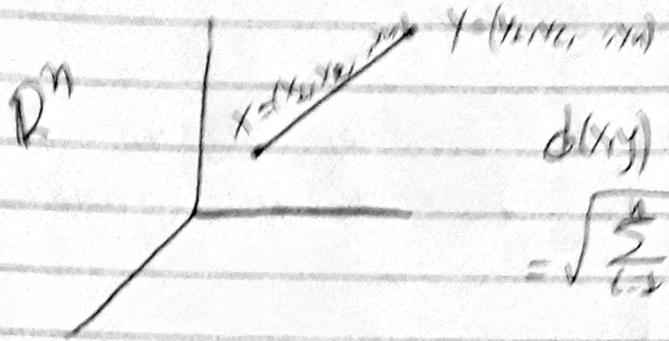
κλίση: $\frac{\tau}{\kappa} = \cot\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

διεύθυνση: $\omega = \cos\varphi \vec{t} + \sin\varphi \vec{t} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{t} \times \vec{b})$

Μια κυλινδρική έλικα δεν μπορεί να είναι

Σφαιρική (η Σφαιρική είναι ΦΡΑΓΜΕΝΗ)

"ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ"



$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y,\, x-y\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

Ανοικτή μπάλα κέντρου p_0 και ακτίνας $r>0$

$$B_r(p_0)=\{p\in\mathbb{R}^n \,/\, d(p,p_0)<r\}$$

<u>Ανοικτά σύνολα</u>: Το υποσύνολο $U\subseteq\mathbb{R}^n$ καλείται <u>ανοικτό</u> (στον $\mathbb{R}^n$) <u>αν-ν</u> $\forall\, p_0\in U \ \exists\ B_\varepsilon(p_0)\subseteq U$

Το $A\subseteq\mathbb{R}^n$ καλείται κλειστό (στον $\mathbb{R}^n$) <u>αν-ν</u> το συμπλήρωμα $A^c=\mathbb{R}^n\setminus A$ είναι ανοικτό

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x,y\geq 0\}$$

ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΧΩΡΩΝ

$\boxed{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}$

Έστω $F: U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η F καλείται διαφορίσιμη στο σημείο $p_0\in U$ <u>αν-ν</u> $\exists$ γραμμ. απεικόνιση $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

$$\lim_{p\to p_0}\frac{F(p)-F(p_0)-L(p-p_0)}{\|p-p_0\|\ \phi(p-p_0)}=0$$

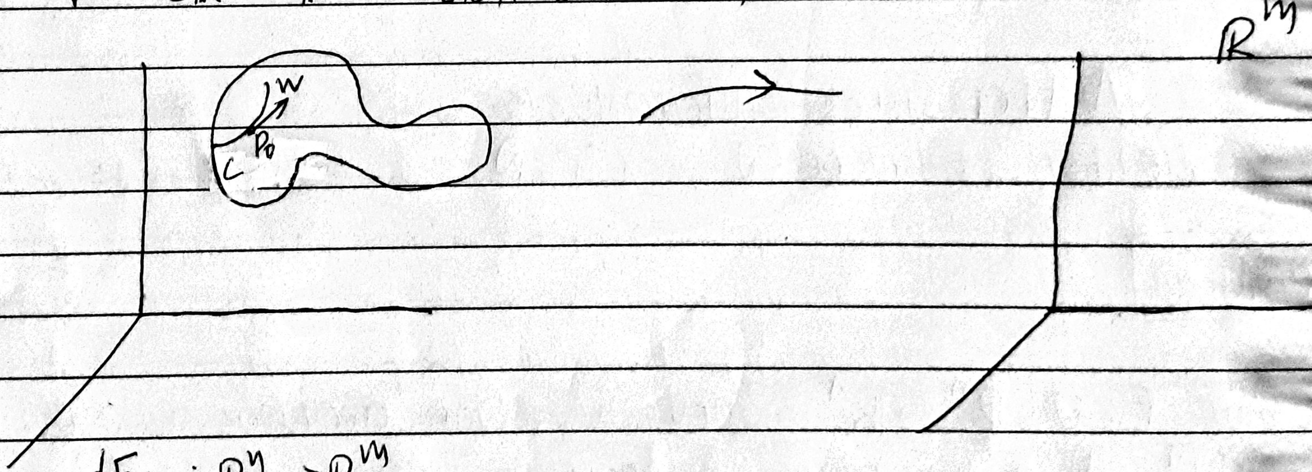
$$F(p)=F(p_0)+L(p-p_0)+\|p-p_0\|\varphi(p-p_0)$$

Η L είναι μοναδική και καλείται διαφορικό της F στο p_0, συμβολίζεται με $dF_{p_0}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Ο πίνακας της dF_{p_0} ως προς τις συνήθεις βάσεις του $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ είναι ο λεγόμενος Ιακωβιανός πίνακας

$$p_0=(x_1,\dots,x_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p_0) \end{pmatrix}$$

Έστω $F: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ διαφ. απεικόνιση.



$dF_{p_0}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$dF_{p_0}(w) = ?$

Θεωρώ καμπύλη $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$ με

$c(0) = p_0$ και $c'(0) = w$

Θεωρώ την καμπύλη $\tilde{c}:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^m$ με $\tilde{c}=F\circ c$

Προφανώς: $\tilde{c}(0)=F(c(0))=F(p_0)$

Τότε ισχύει $dF_{p_0}(w)=\tilde{c}'(0)$.

$$dF_{p_0}: T_{p_0}\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{F(p_0)}\mathbb{R}^m$$

$T_{p_0}\mathbb{R}^n$ = το σύνολο των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ με αφετηρία το p_0. Έχει δομή Δ.Χ και μάλιστα $T_{p_0}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$

→ Εφαπτόμενος χώρος του $\mathbb{R}^n$.